アルゴリズム論

中野

Note 3 いろいろなNP完全

2020.4.10作成　5.11 update

2021.4.19update

いろいろなＮＰ完全問題

今回の講義の概要

クラスNP完全(NP-Complete)の代表的な問題をいくつか示す。

NP完全であるための証明の例をいくつか示す。

SAT -> 3SAT -> CLIQUE -> IS ->VC

3SAT -> 3DM -> PARTITION

クラスNP完全

次のふたつを満たす問題AはNP完全に属する。
(多項式時間で検証(verifies)できる判定問題の集合)
(NP完全は問題の集合です。)

1. 問題AはNPに属する。
2. もし、問題Aが多項式時間で解けたら、NPに属する問題はすべて多項式時間で解ける。

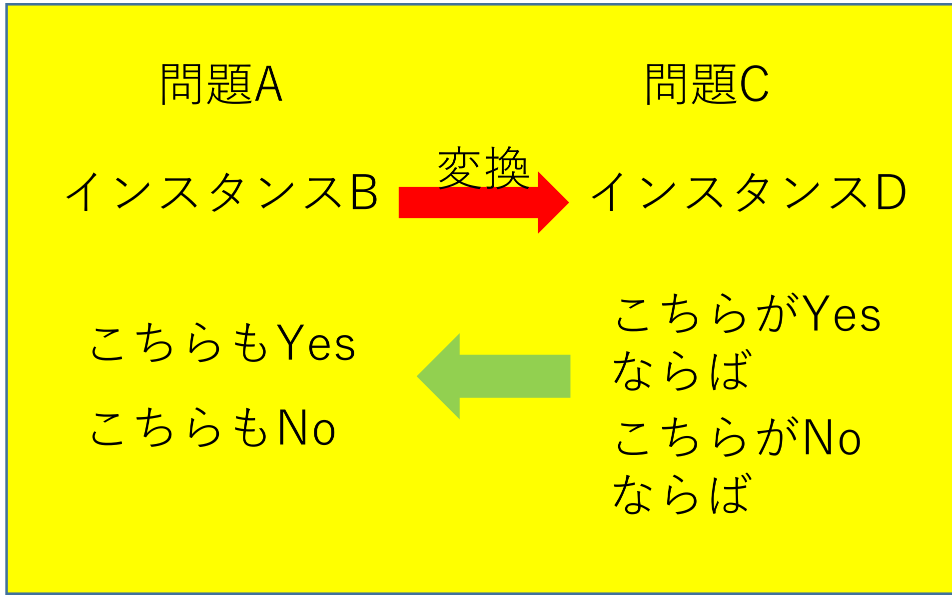
ある問題がNP完全であることを利用すると、
他のある問題がNP完全であることを証明することは比較的容易である。

ある問題Aの任意のインスタンスBを、問題CのインスタンスDに変換する多項式時間アルゴリズムがあり、このとき、BがYESのときは、必ずDがYESであり、BがNOのときは、必ずDがNOであるならば、問題Aは問題Cに多項式時間帰着可能である、という。

問題Aが問題Cに多項式時間帰着可能であるとき、問題Cが多項式時間アルゴリズムを持てば、問題Aも多項式時間アルゴリズムを持つことになる。
(もし問題Aが多項式時間アルゴリズムを持ってもCが多項式時間アルゴリズムを持つかどうかはワカラナイことに注意)

NP完全な問題AがNPに属する問題Cに多項式時間帰着可能ならば、CはNP完全である。
(つまり、もし、Cが多項式時間アルゴリズムを持てば、Aも多項式時間アルゴリズムを持つ.)

多項式時間帰着可能



3SAT問題がNP完全であることの証明

3SAT問題
ちょうど3つのリテラルの和である節の集合
Ci (i=1,2, ...,)が与えられたとき、
この節のすべてを1にするような、
論理変数への0,1の割り当てがあるかどうか判定せよ。

例 3SAT問題の例

$$C_1=x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3$$
$$C_2=\bar{x}_1+x_2+x_3$$
$$C_3=x_1+x_2+x_3$$

3SATがNPに属するのは自明である。あとは、
SAT問題が3SAT問題に多項式時間帰着可能であることを示せばいい。

3SAT問題がNP完全であることの証明(つづき)

SATの
論理変数の集合を｛$u_1, u_2, u_3,$・・・, u_n｝とする。
節の集合を｛$C_1, C_2, C_3,$・・・, C_m｝とする。
SATの各節 C_j から 3SATの節の集合 C'_j を下記のように作る
$C_j = \{ z_1 + z_2 + z_3 +$ ・・・$+ z_k \}$ としよう。 z_iは論理変数 u_jか、その否定 u^-_jかのいずれかである。

(場合１)
もしk=1なら、新しい論理変数 y_1^j と y_2^j を使って
$C'_j = \{$
$\{ z_1 + y_1^j + y_2^j \},$
$\{ z_1 + y_1^j + y^-{}_2^j \},$
$\{ z_1 + y^-{}_1^j + y_2^j \},$
$\{ z_1 + y^-{}_1^j + y^-{}_2^j \}$
$\}$
のように4つの節を作る。（z_1が真のときのみ、この4つの節すべてが真になりうることに注意）

3SAT問題がNP完全であることの証明(つづき)

(場合2)

もしk=2なら、新しい論理変数 y_1^j を使って

$C'_j = \{$

$\{ z_1 + z_2 + y_1^j \}$,

$\{ z_1 + z_2 + \bar{y}_1^j \}$

$\}$

のように2つの節を作る。

(z_1 か z_2の少なくとも一方が真のときのみ、この2つの節すべてが真になりうることに注意)

3SAT問題がNP完全であることの証明(つづき)

(場合3)

もしk=3なら、そのまま、

$C'_j = C_j$ とする。

3SAT問題がNP完全であることの証明(つづき)

(場合4)

もしk>3なら、k-3個の新しい論理変数 $y_1^j, y_2^j, \cdots, y_{k-3}^j$ を使って

$C'_j = \{$

$\{ z_1 + z_2 + y_1^j \},$

$\{ \bar{y}_1^j + z_3 + y_2^j \},$

$\{ \bar{y}_2^j + z_4 + y_3^j \},$

・

・

$\{ \bar{y}_{k-4}^j + z_{k-2} + y_{k-3}^j \},$

$\{ \bar{y}_{k-3}^j + z_{k-1} + z_k \}$

$\}$

のようにk-2個の節を作る。

(z_1 ・・・ z_kの少なくともひとつが真のときのみ、

このk-2個の節すべてが真になりうることに注意)

3SAT問題がNP完全であることの証明(つづき)

このようにSATのインスタンスを
3SATのインスタンスに変換することが、多項式時間で可能である。
(節の個数は増えたけど多項式個である。)
また、元のSATの答がYESのときのみ(if and only if) 3SATの答が
YESである。

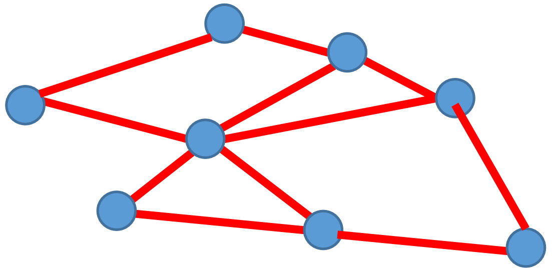
よって3SATはNP完全である。
(3SATを多項式時間で解ければ、SATが多項式時間で解ける。
さらに、SATを多項式時間で解ければ、
他のすべてのNPに属する問題が多項式時間で解ける。
だから、3SATは高速に解けそうもない
ムズカシイ問題なのである。)

2SATはPに属することが知られている。

CLIQUE問題がNP完全であることの証明
(前回やりました)

INDEPENDENT SET問題 (IS)

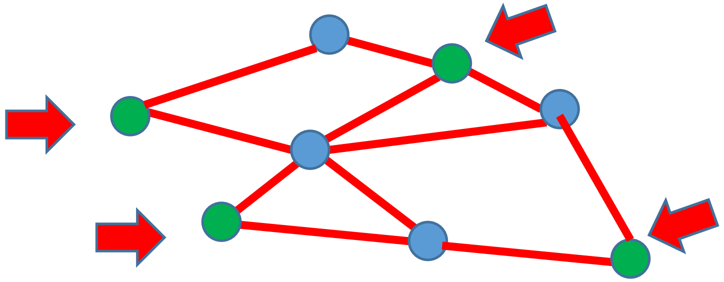
グラフと正の定数kがあたえられたとき
互いに隣接していないGの点の集合Uで、
k個以上の点からなるものがあるかどうか。



4点以上のＩＳある？

INDEPENDENT SET問題 (IS)

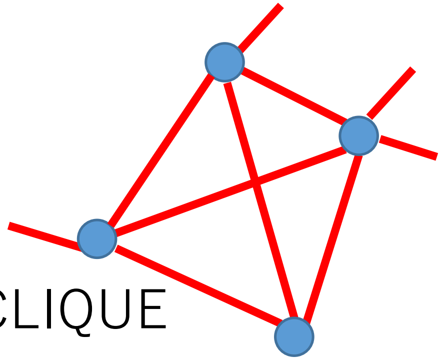
グラフと正の定数kがあたえられたとき
互いに隣接していないGの点の集合Uで、
k個以上の点からなるものがあるかどうか。



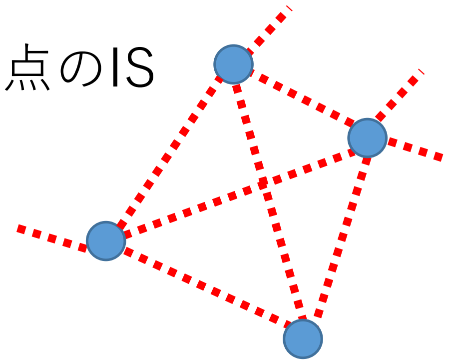
4点以上のＩＳある？

IS問題 がＮＰ完全であることの証明

GのINDEPENDENT SETは、 Gの補グラフのCLIQUEになっている。
Gの補グラフとは、Gにおいて辺がある2点間には辺がなく、
Gにおいて辺がない2点間には辺があるようなグラフである。



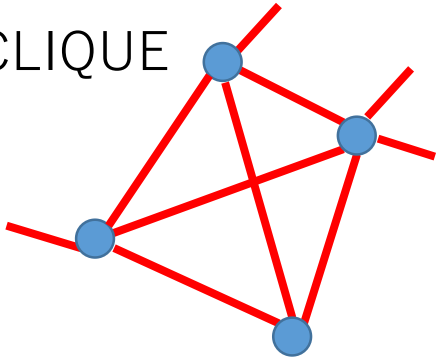
ISがNPに属していることは明らか。



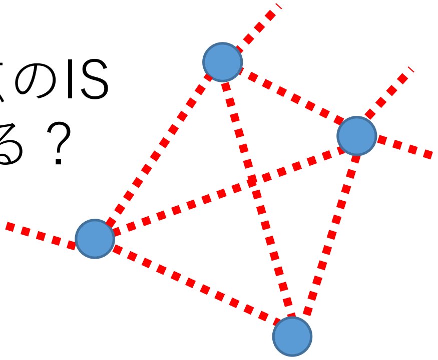
CLIQUE問題のインスタンスから
IS問題のインスタンス(補グラフ)が多項式時間でできる。
また、
Gにサイズkのクリークがあるときのみ、(if and only if)
Gの補グラフにk点のINDEPENDENT SETがある。

IS問題はＮＰ完全である

4点のCLIQUE
ある？



4点のIS
ある？



2. こっちも
早く解ける

NP完全の
問題
CLIQUE

多項式時間帰着 →

IS問題

1. こっちが早く
解ければ

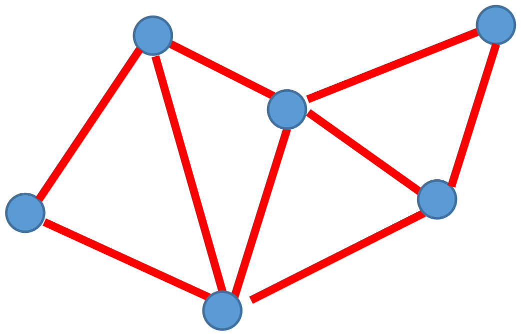
3. こっちも
ＮＰ完全

Vertex Cover問題(VC問題)

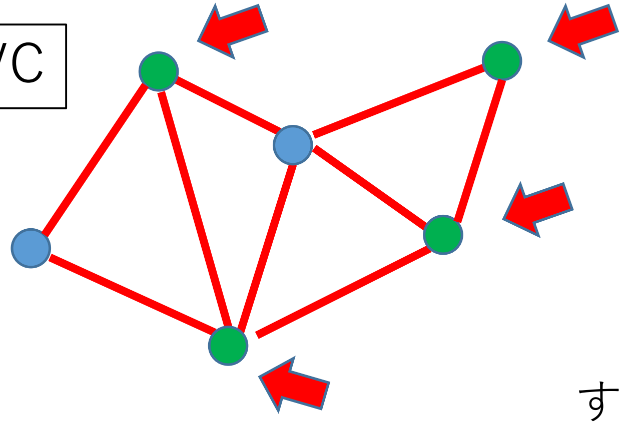
グラフと正の定数kがあたえられたとき、

k個以下のGの点の集合V'で、Gの各辺の端点の少なくともひとつを含むものがあるかどうか。

(つまり、両方の端点とも V' に属していない辺は、ないようにしたい。)



4点のVC

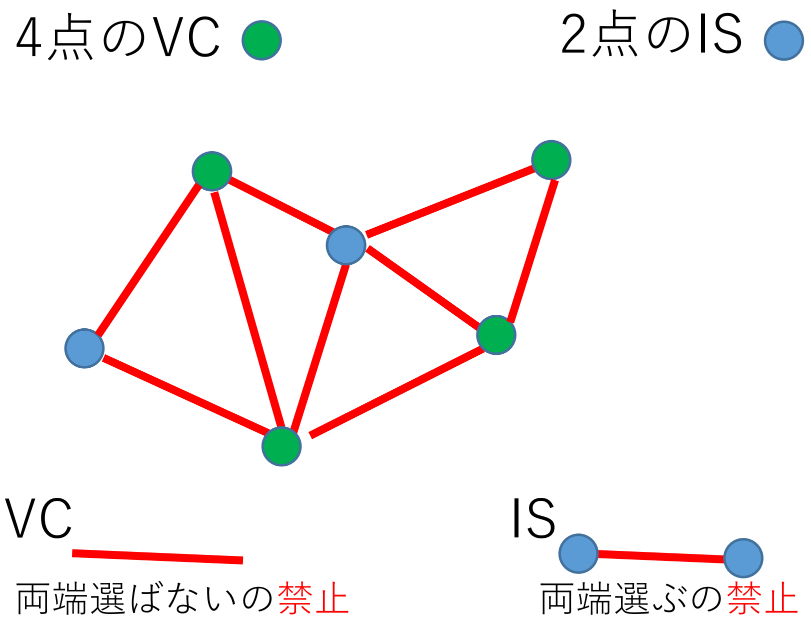


すべての辺見張れる？

Vertex Cover問題(VC問題)はＮＰ完全

VCがNPに属していることは明らか。

IS問題のインスタンスから、 VC問題の
インスタンスが次のように多項式時間でできる。
グラフGにk点以上のINDEPENDENT SET が
あるときのみ (if and only if)
グラフGに|V|-k個以上の点からなる
VERTEX COVERがある。
(|V|はGの点の個数とする。)

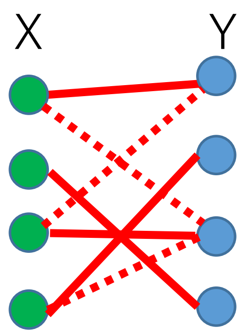


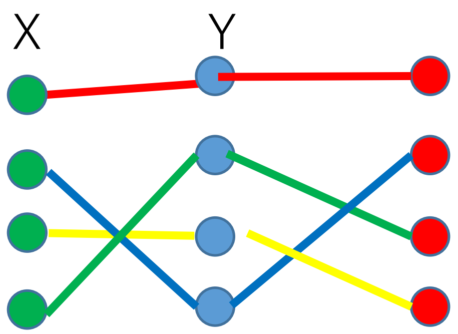
なぜなら、グラフGの点の部分集合 V'がGのINDEPENDENT SETならば、
V'に属さない点の集合はVERTEX COVERになっている。

Vertex Cover問題(VC問題)はＮＰ完全

3DIMENTIONAL MATCHING問題(3DM)

それぞれq個の要素からなる集合W,X,Yがある。
M⊆W x X x Yとする。
M'⊆Mなる集合M'で下記の条件を満たすものはあるか。
|M'|=q かつ M'中にW,X,Yからの要素はちょうど一回づつ現れる。



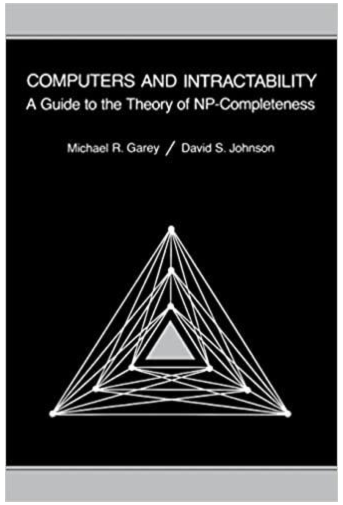


PARTITION問題

いくつかの正整数の集合 $A = \{ a_1, a_2, ・・・, a_k \}$が
与えられたとき、
これを和の等しい2つの部分集合に分割できるかどうか。

Computers and Intractability:
A Guide to the Theory of NP^Completeness
by Garey Johnson　1979

NP完全な問題の例



LONGEST PATH
LARGEST COMMON SUBGRAPH
STEINER TREE IN GRAPHS
3次グラフの点彩色
…….数千から数万(以上)の問題が知られている。