Z定理を用いたλμ計算の合流性証明

本多 雄樹（名古屋大学） 中澤 巧爾（名古屋大学） 藤田 憲悦（群馬大学）

成果

① **$\lambda\mu$計算**の合流性を**Z定理**[Dehornoy+08]を用いて証明

- [Baba+01]の complete development がZ性を満たすことを証明

② **$\lambda\mu$計算**に外延性規則($\mu\eta$)を加えた計算体系の合流性を
合成的Z定理[Nakazawa+16] を用いて証明

- $\mu\eta$簡約とそれ以外の簡約に分割

λμ計算+外延性規則[Parigot92]

$\lambda\mu$計算 = λ計算+制御オペレータ
項：$M ::= x \mid \lambda x.x \mid MM \mid \mu\alpha.M \mid [\alpha]M$
簡約規則：$(\beta)\ (\lambda x.M)N \to_\beta M[x := N]$

$(S)\ (\mu\alpha.M)N \to_S M\big[[\alpha]w := [\alpha](wN)\big]$

$(R)\ [\alpha](\mu\beta.M) \to_R M[\beta := \alpha]$

$(\mu\eta)\ \ \mu\alpha.[\alpha]M \to_{\mu\eta} M\ (\alpha \notin M)$

簡約の例：

$(S)\ \big(\mu\alpha.[\alpha]([\alpha]xy)\big)z \to_S \mu\alpha.[\alpha]\big(([\alpha]xyz)z\big)$

Z定理[Dehornoy+08]

抽象書き換え系 $(A,\to)$ は，次のZ性を満たす
A上の写像fが存在すれば合流する

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[dl, dashed, "*"'] \\ f(a) \arrow[r, dashed, "*"] & f(b) \end{tikzcd}$$

λ_βの場合，complete development がZ性を満たす
complete development = 見えている redex を
全て簡約したもの

合成的Z定理[Nakazawa+16]

抽象書き換え系 $(A,\to)$ は，$\to = \to_1 \cup \to_2$
とするとき，次の性質を満たすA上の
写像f_1，f_2 が存在すれば合流する

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "1"] & b \arrow[dl, dashed, "1" near start, "*"' near end] \\ f_1(a) \arrow[r, dashed, "1\ *"] \arrow[d, dashed, "{1,2}"' near start, "*"' near end] & f_1(b) \\ f_2(f_1(a)) \arrow[r, dashed, "{1,2\ *}"] & f_2(f_1(b)) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "2"] & b \arrow[dl, dashed, "{1,2}" near start, "*"' near end] \\ f_2(f_1(a)) \arrow[r, dashed, "{1,2\ *}"] & f_2(f_1(b)) \end{tikzcd}$$

どこが難しい？

通常の complete development ではZ性を
満たさない
→ [Baba+01] の complete development を利用

$\big([\alpha](\mu\beta.M)\vec{N}\big)^* = M^*\left[[\beta]w := [\alpha](w\vec{N}^*)\right]$

とする
→ そのままではまだZ性を満たさない

[理由] $\mu\alpha.[\alpha]\big((\mu\beta.M)\vec{N}\big)$ $[\alpha]\big((\mu\beta.[\beta]M)\vec{N}\big)$

赤と青のどちらかを優先処理しなければならない
→ どちらでもZ性は満たさない
赤を優先した場合の反例：

$[\alpha]\Big(\mu\beta.\big((\lambda x.x)([\beta](\mu\gamma.y))\big)\Big) \to [\alpha](\mu\beta.[\beta](\mu\gamma.y))$

complete development

$y \ \not\to^{*} \ [\alpha](\mu\gamma.y)$

こうやって解決しました

合成的Z定理 [Nakazawa+16] を適用
$\to_1 = \to_{\mu\eta}$， $\to_2 = \to_\beta \cup \to_S \cup \to_R$
赤と青が競合しない！

M^{*_1} の定義

$x^{*_1} = x$
$(\lambda x.M)^{*_1} = \lambda x.M^{*_1}$
$(M_1M_2)^{*_1} = {M_1}^{*_1}{M_2}^{*_1}$
$(\mu\alpha.[\alpha]M)^{*_1} = M^{*_1}\ \ (\alpha \notin M)$
$(\mu\alpha.M)^{*_1} = \mu\alpha.M^{*_1}$ (それ以外)
$([\alpha]M)^{*_1} = [\alpha]M^{*_1}$

M^{*_2} の定義

$x^{*_2} = x$
$(\lambda x.M)^{*_2} = \lambda x.M^{*_2}$
$\big((\lambda x.M_1)M_2\big)^{*_2} = {M_1}^{*_2}\,[x := {M_2}^{*_2}]$
$\big((\mu\alpha.M)\vec{N}\big)^{*_2} = \mu\alpha.M^{*_2}\left[[\alpha]w := [\alpha](w\vec{N}^{*_2})\right]$
$(M_1M_2)^{*_2} = {M_1}^{*_2}{M_2}^{*_2}$ (それ以外)
$(\mu\alpha.M)^{*_2} = \mu\alpha.M^{*_2}$
$\big([\alpha](\mu\beta.M)\vec{N}\big)^{*_2} = M^{*_2}\left[[\beta]w := [\alpha](w\vec{N}^{*_2})\right]$
$([\alpha]M)^{*_2} = [\alpha]M^{*_2}$ (それ以外)

$(\cdot)^{*_1}$，$(\cdot)^{*_2}$が合成的Z定理の条件を満たすことを証明